Document sur les homographies

Page 1 : Définition des homographies, prolongement de celles-ci à $\hat{\mathbb{C}}$

⊕ Proposition : les homographies sont des bijections de $\hat{\mathbb{C}}$.

Page 3 : l'ensemble des homographies est muni d'une structure de groupe

Page 5 : l'action par homographies sur $\hat{\mathbb{C}}$ est fidèle et simplement 3-transitives.

Page 10 Définition du birapport

Page 11 : CNS pour que deux birapports soient égaux

Page 12 : CNS pour que 4 points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$ soient alignés ou cocycliques.

Page 14 : H est engendré par $z \longmapsto \frac{1}{z}$ et $\{ z \longmapsto az+b,\ a \neq 0 \}$

Page 15 : Définition des pseudos-cercles de $\mathbb{C}$ et détermination de leurs équations cartésiennes

Page 18 : Une homographie envoie un pseudo-cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ sur un pseudo-cercle de $\hat{\mathbb{C}}$

EN DVPT : Action par homographies sur $\hat{\mathbb{C}}$ et application au birapport.

Autour des homographies

On s'intéresse ici à quelques propriétés des homographies et notamment leur lien avec le birapport. Commençons par rappeler la définition d'une homographie :

[**Def** : On appelle homographie, toute application $h : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ de la forme :
$$h : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{où } ad-bc \neq 0$$

En ajoutant à l'ensemble $\mathbb{C}$ un point à l'infini, on est en mesure d'étendre la définition des homographies à $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la droite projective complexe en posant :

$$h(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{si } c \neq 0 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme par $-\frac{d}{c}$, la fonction n'était pas définie, on la prolonge en ce point en posant :

$$h\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

Proposition 1 : les homographies sont des bijections de $\hat{\mathbb{C}}$ sur $\hat{\mathbb{C}}$

[**Dem** : Soit $h : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ prolongée à $\hat{\mathbb{C}}$ comme précédemment.

[**Etape 1** Si $c=0$, alors h est affine, donc réalise une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et comme $h(\infty)=\infty$, h est bien une bijection de $\hat{\mathbb{C}}$

alors
$a, d \neq 0$ car $ad-bc \neq 0$

[Etape 2] Si $c \neq 0$, alors $h(\infty) = \frac{a}{c}$ et $h\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$

Objectif Montrer que ∞ a pour unique antécédent dans $\mathbb{C}$: $-\frac{d}{c}$.

Si $x \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $h(x) \in \mathbb{C}$ et a donc son image dans $\mathbb{C}$

Ainsi, ∞ a donc un unique antécédent dans $\mathbb{C}$ qui est $-\frac{d}{c}$.

Objectif : Montrer que $\frac{a}{c}$ a pour unique antécédent ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Soit $z \in \hat{\mathbb{C}}$ tel que $h(z) = \frac{a}{c}$ (nécessairement $z \neq -\frac{d}{c}$)

Alors $h(z) = \frac{a}{c} \iff \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$

$$\iff c(az+b) = a(cz+d)$$

$$\iff acz + bc = acz + ad$$

$$\iff ad - bc = 0$$

Or $ad - bc \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{c}$ a pour unique antécédent ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$.

[Etape 3] Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, montrons que α admet un unique antécédent dans $\hat{\mathbb{C}}$ via h.

Alors $h(z) = \alpha \iff \frac{az+b}{cz+d} = \alpha$

$$\iff \alpha(cz+d) = az+b$$

$$\iff \alpha cz + \alpha d = az + b$$

$$\iff (\alpha c - a)z = b - \alpha d$$

$$\iff z = \frac{b - \alpha d}{\alpha c - a}$$ à $\alpha c - a \neq 0$ car $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$

Donc tout élément de $\hat{\mathbb{C}}$ admet un unique antécédent par h et donc h est une bijection de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$ ■

Proposition 2 : L'ensemble des homographies H (étendu à $\hat{\mathbb{C}}$) est un groupe par la loi de composition usuelle des fonctions

[**Dem** : Montrons que la composée de deux homographies est encore une homographie et que l'inverse d'une homographie est une homographie, ce qui permettra de voir H comme un sous groupe de l'ensemble des fonctions de $\hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ par la loi de composition.

[**Etape 1** Soient $h_1, h_2 \in H$ et montrons $h_1 \circ h_2 \in H$

$$h_1 : z \longmapsto \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$$

$$h_2 : z \longmapsto \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$$

Alors $$h_2 \circ h_1(z) \overset{(\circledast)}{=} \frac{a_2 \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + b_2}{c_2 \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + d_2}$$

$$= \frac{a_2 a_1 z + b_1 a_2 + b_2 c_1 z + b_2 d_1}{c_2 a_1 z + c_2 b_1 + d_2 c_1 z + d_1 d_2}$$

$$= \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1) z + (b_1 a_2 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1) z + (c_2 b_1 + d_1 d_2)}$$

Or, $(a_2 a_1 + b_2 c_1)(c_2 b_1 + d_1 d_2) - (c_2 a_1 + d_2 c_1)(b_1 a_2 + b_2 d_1) =$
$(a_1 d_1 - b_1 c)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0 \Rightarrow h_2 \circ h_1 \in H$.

[Etape 2 : Montrons que $h_1 \in H$ est inversible dans H.

On sait que $h_1 : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$ est inversible car est bijective sur $\hat{\mathbb{C}}$ il reste à montrer que son inverse est bien dans H, ie est une homographie.

Par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$ définit une action à gauche de $GL_2(\mathbb{C})$ sur $\hat{\mathbb{C}}$, ce qui a été vérifié en ⊛ puisque

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & b_1 a_2 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi par $h_1 : \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \hat{\mathbb{C}}$, on a via l'identité
$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$$
$(**)$

$$h_1^{-1} : z \longmapsto \frac{\frac{d}{\det(A)} z - \frac{b}{\det(A)}}{\frac{-c}{\det(A)} z + \frac{a}{\det(A)}} = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

D'où $h_1^{-1} \circ h_1(z) = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$.

[Gna : si $c \neq 0$ $\quad h_1(\infty) = \frac{a}{c} \Rightarrow h_1^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty$

si $c = 0$ $\quad h_1(\infty) = \infty \Rightarrow h_1^{-1}(\infty) = \infty$ $\Big\}$ voir $(**)$

• si $z = -\frac{d}{c}$ $\quad h_1\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ et $h_1^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ cf $(**)$] ■

Thm : L'action de H sur $\hat{\mathbb{C}}$ via les homographies est

- fidèle
- simplement 3-transitive, ie $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \hat{\mathbb{C}}$ deux à deux distincts
  $\forall (z_1', z_2', z_3') \in \hat{\mathbb{C}}$ deux à deux distincts

il existe une <u>unique</u> homographie h telle que

$$h(z_i) = z_i' \quad \forall i \in [\![1, 3]\!]$$

Dem : Etape 1 : le fait que
$$\begin{aligned} H \times \hat{\mathbb{C}} &\longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ (h, z) &\longmapsto h(z) \end{aligned}$$

Soit une action est immédiat. (on a déjà vérifié que H avait une structure de groupe par la composition)
Il faut montrer que l'action est fidèle ie que : $h(z) = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}} \implies h = Id_{\hat{\mathbb{C}}}$

Or par $h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad ad-bc \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} h(z) = z \quad &\iff (cz+d)z = az+b \\ &\iff cz^2 + dz - az - b = 0 \\ &\iff cz^2 + (d-a)z - b = 0 \end{aligned}$$

Alors $h(z) = z$ pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$ implique en particulier que $cX^2 + (d-a)X - b \in \mathbb{C}[X]$ a une infinité de racines dans $\mathbb{C}$ et donc que $cX^2 + (d-a)X - b = 0_{\mathbb{C}[X]} \iff \begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ b = 0 \end{cases}$

Ainsi $h : z \longmapsto \dfrac{a}{d} z = z$

et $h = Id_{\hat{\mathbb{C}}}$ et l'action est <u>fidèle</u>

[Etape 2 : Montrons que l'action est simplement 3-transitive

Pour établir ce résultat, il suffit de montrer que pour (z_1, z_2, z_3) deux à deux distincts dans $\hat{\mathbb{C}}$ et $(0, 1, \infty)$ il existe une unique homographie telle que $\begin{cases} h(z_1) = 0 \\ h(z_2) = 1 \\ h(z_3) = \infty \end{cases}$

Explication de la méthode :

En effet, pour (z_1, z_2, z_3) et (z_1', z_2', z_3') il existera alors deux uniques homographies h_1 et h_2 telles que

$$\begin{cases} h_1(z_1) = 0 \\ h_1(z_2) = 1 \\ h_1(z_3) = \infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_2(z_1') = 0 \\ h_2(z_2') = 1 \\ h_2(z_3') = \infty \end{cases}$$

Alors h_2^{-1} est aussi une homographie et $h_2^{-1} \circ h_1$ vérifie

$$\begin{cases} h_2^{-1} \circ h_1(z_1) = z_1' \\ h_2^{-1} \circ h_1(z_2) = z_2' \\ h_2^{-1} \circ h_1(z_3) = z_3' \end{cases}$$

Cette homothétie est unique car sinon s'il existait une autre homothétie h_3 telle que $\begin{cases} h_3(z_1) = z_1' \\ h_3(z_2) = z_2' \\ h_3(z_3) = z_3' \end{cases}$ et $h_3 \neq h_2^{-1} \circ h_1$ on aurait $h_2 \circ h_3 \neq h_1$ avec $\begin{cases} h_2 \circ h_3(z_1) = 0 \\ h_2 \circ h_3(z_2) = 1 \\ h_2 \circ h_3(z_3) = \infty \end{cases}$

Absurde par unicité de h_1

Demontrons désormais que pour (α, β, γ) deux à deux $\neq$ il existe une unique homographie telle que $\begin{cases} h(\alpha) = 0 \\ h(\beta) = 1 \\ h(\gamma) = \infty \end{cases}$

On va raisonner par $\boxed{\text{Analyse - Synthèse}}$

• Cas n°1 : Supposons dans un premier temps que $\infty \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$

On cherche donc $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$

et

$$\text{①}\ \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d} = 0 \quad \Bigg| \quad \frac{a\beta + b}{c\beta + d} = 1\ \text{②} \quad \Bigg| \quad \frac{a\gamma + b}{c\gamma + d} = \infty\ \text{③}$$

Supposons par l'absurde que h soit solution avec $c = 0$

Puisque $ad - bc \neq 0$ on a nécessairement $d \neq 0$

et $\frac{a\gamma + b}{d} = \infty \iff \gamma = \infty$ car $a, b \in \mathbb{C}$

Ceci est absurde car $\infty \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ie $\boxed{\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}}$

D'où si h est solution $\boxed{c \neq 0}$

Comme $c \neq 0$, $\frac{a\gamma + b}{c\gamma + d} = \infty \iff h(\gamma) = \infty$

$$\iff \gamma = \frac{-d}{c}$$

$$\iff d = -\gamma c$$

En exploitant ①, il vient $a\alpha + b = 0 \iff b = -a\alpha$

En exploitant ②, il vient $\frac{a\beta - a\alpha}{c\beta - \gamma c} = 1 \iff \frac{a}{c}\frac{(\beta - \alpha)}{(\beta - \gamma)} = 1$

$$\iff a = \frac{\beta - \gamma}{\underbrace{(\beta - \alpha)}_{\neq 0}} c$$

Comme une homographie est invariante par multiplication des coefficients a, b, c, d par une même cste $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on détermine de manière unique h via les relations :

$d = -\gamma c$, $b = -a\alpha$, $a = \frac{\beta - \gamma}{\beta - \alpha} c$

En effet, en posant $c = 1$, on détermine uniquement d, b et a et une autre valeur de c donne exactement la m̂ application h.

Vérifier qu'il s'agit d'une homographie en contrôlant que } Synthèse

- $ad - bc \neq 0$

Or $ad - bc = \left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\right) c \times -\gamma c + a \alpha \times c$

$$= -\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\right)\gamma c^2 + \alpha\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\right)c^2$$

$$= \underbrace{c^2}_{\neq 0} \underbrace{\left(\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}\right)}_{\neq 0} \underbrace{\left[\alpha-\gamma\right]}_{\neq 0}$$

β, α, γ deux à deux distincts

$\neq 0$

$\boxed{\text{Cas n°2}}$ Supposons cette fois-ci que $\infty \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ et donc $\alpha = \infty$ ou $\beta = \infty$, ou $\gamma = \infty$.

- Si $\boxed{\alpha = \infty}$ on cherche donc $h \in H$ tel que $h(\infty) = 0$

Alors nécessairement si h existe $h : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ on a $c \neq 0$ (sinon $h(\infty) = \infty$) et

$h(\infty) = 0 \iff \frac{a}{c} = 0 \iff a = 0$

En exploitant la relation (2), il vient $\frac{b}{c\beta + d} = 1$

En exploitant la relation (3), il vient $\frac{b}{c\gamma + d} = \infty$

Puisque $c \neq 0$ si un tel h existe, ∞ admet pour unique antécédent $-\frac{d}{c}$ $\Rightarrow$ $\frac{b}{c\gamma + d} = \infty \iff d = -\gamma c$

D'où au final
$$\begin{cases} a = 0 \\ d = -\gamma c \\ b = c(\beta - \gamma) \text{ en exploitant } 2 \\ \text{car } \frac{b}{c\beta + d} = 1 \iff \frac{b}{c(\beta-\gamma)} = 1 \end{cases}$$

Ainsi on a déterminé une unique application h, puisque l'on ne modifie pas une homographie en multipliant chaque constante a, b, c, d par un même $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Par $c = 1$, on détermine effectivement b et d de manière unique.

Vérifions également que $ad - bc \neq 0$
$$ad - bc = -bc = -\underset{\neq 0}{c^2}\underbrace{(\beta - \gamma)}_{\neq 0}$$
Synthèse

Si $\boxed{\beta = \infty}$ On cherche $h \in H$ telle que $\begin{cases} h(\alpha) = 0 \\ h(\infty) = 1 \\ h(\gamma) = \infty \end{cases}$

Si un tel h existe, nécessairement $c \neq 0$

Car sinon $h(\infty) = \infty \neq 1$.

Ainsi $h(\infty) = \frac{a}{c} = 1 \iff a = c$

En exploitant $h(\gamma) = \infty$ on a donc $\gamma = \frac{-d}{c}$

En exploitant $h(\alpha) = 0$ on a donc $b = -a\alpha$

On détermine uniquement h en fixant $a = c = 1$.

Vérifions que $ad - bc \neq 0$.

On a $ad - bc = a \times (-\gamma a) + a\alpha \times a = \underset{\neq 0}{a^2}\underbrace{(\alpha - \gamma)}_{\neq 0}$ car $a = c \neq 0$ et $\alpha \neq \gamma$.

Si $\boxed{\gamma = \infty}$ On cherche h telle que $\begin{cases} h(\alpha) = 0 \\ h(\beta) = 1 \\ h(\infty) = \infty \end{cases}$

Si une telle homographie

$h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ existe, necessairement $c = 0$.

En effet, sinon $h(\infty) = \dfrac{a}{c} \neq \infty$.

D'où $\boxed{c = 0}$. De plus si une telle homographie existe

$h(\beta) = 1 \Longrightarrow \dfrac{a\beta + b}{d} = 1$ et donc $d \neq 0$

En exploitant $h(\alpha) = 0$, il vient $a\alpha + b = 0 \iff b = -a\alpha$

On en déduit donc que si une telle homographie h existe alors

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -a\alpha \\ d \underset{\uparrow}{=} a(\beta - \alpha) \\ \text{car } \dfrac{a\beta + b}{d} = 1 \end{cases}$$

Ceci donne aussi $a \neq 0$ car $d \neq 0$

Ce qui determine bien une unique homographie via $a = 1$, qui determine uniquement b et d avec $c = 0$.

De plus $ad - bc \neq 0$ car

$$a^2(\beta - \alpha) + 0 \times a\alpha = \underbrace{a^2}_{\neq 0}\underbrace{(\beta - \alpha)}_{\neq 0}$$

$\blacksquare$

Application de l'etude des homographies

Def : On definit le birapport de quatre points $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ avec $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ deux à deux distincts comme l'image de ω_4 par l'unique homographie h qui envoie $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sur $(\infty, 0, 1)$. On le note $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]$ et

$$[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = h(\omega_4)$$

Proposition : Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ et $\omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4'$ tels que :
- $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ deux à deux distincts
- $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$ deux à deux distincts

Alors $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = [\omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4'] \Leftrightarrow$ il existe une homographie telle que $h(\omega_i) = \omega_i'$ $\forall i \in [\![1, 4]\!]$

En particulier les homographies conservent le birapport

[**Dem** **Etape 1** : Supposons $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = [\omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4']$

On note k l'unique homographie envoyant $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sur $(\infty, 0, 1)$ et k' l'unique homographie envoyant $(\omega_1', \omega_2', \omega_3')$ sur $(\infty, 0, 1)$.

Alors $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = k(\omega_4)$ et $[\omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4'] = k'(\omega_4')$

Alors $k(\omega_4) = k'(\omega_4')$ et

$$k'^{-1} \circ k : \begin{array}{l} \omega_1 \longrightarrow \infty \longrightarrow \omega_1' \\ \omega_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow \omega_2' \\ \omega_3 \longrightarrow 1 \longrightarrow \omega_3' \\ \omega_4 \longrightarrow k(\omega_4) = k'(\omega_4') \longrightarrow \omega_4' \end{array}$$

D'où $k'^{-1} \circ k(\omega_i) = \omega_i'$ $\forall i \in [\![1, 4]\!]$

[**Etape 2** Réciproquement supposons qu'il existe une homographie h envoyant ω_i sur ω_i' $\forall i \in [\![1, 4]\!]$

Alors en particulier h envoie $\omega_i \to \omega_i'$ $\forall i \in [\![1, 3]\!]$ et il y a par simple-3 transitivité de H sur $\hat{\mathbb{C}}$ une unique homographie telle que $h(\omega_i) = \omega_i'$ $\forall i \in [\![1, 3]\!]$

En gardant les notations de l'étape 1, on a donc

$h = k'^{-1} \circ k$ et $h(\omega_4) = \omega_4' = k'^{-1}(k(\omega_4))$

Ce qui nous donne bien :

$h(\omega_4) = k'^{-1} \circ k(\omega_4) = \omega_4'$

Soit $k(\omega_4) = k'(\omega_4') \iff [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = [\omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4']$

■

<u>Application</u> : Quatre points $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \hat{\mathbb{C}}$, <u>distincts</u> sont cocycliques ou alignés $\iff [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] \in \mathbb{R}$

[<u>Dem</u> : Commençons, par remarquer que trois points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$ sont nécessairement alignés ou cocycliques.

- En effet, si $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$, alors soit ils sont alignés ou bien forment un vrai triangle du plan et sont sur le cercle circonscrit à ce triangle.
- Si un des ω_i est ∞, alors les deux autres ω_i sont dans $\mathbb{C}$ et sont alignés. Ainsi $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in D \cup \{\infty\}$ où D est la droite passant par les deux $\omega_i \neq$ de ∞. Comme $D \cup \{\infty\}$ est une droite de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}}$, on a bien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ alignés dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Supposons désormais, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ <u>deux à deux distincts.</u>

[<u>Lemme admis :</u> les homographies preservent les pseudos-cercles de $\hat{\mathbb{C}}$ où on designe par pseudo-cercles, les vrais cercles de $\mathbb{C}$ et les droites de $\mathbb{C}$ auxquelles on adjoint ∞.

[<u>Etape 1</u> : Supposons que $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ sont cocycliques ou alignés. Notons h l'unique homographie envoyant $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sur $(\infty, 0, 1)$

Dire que $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sont cocycliques ou alignés dans $\hat{\mathbb{C}}$ c'est dire qu'ils appartiennent à un même pseudo-cercle.
(~~Ils~~ sont cocycliques si aucun des ω_i est ∞ et cocycliques dans $\mathbb{C}$ et sont alignés si, alignés dans $\mathbb{C}$, avec la possibilité qu'un des ω_i soit ∞)

[Alors par préservation des pseudos-cercles de $\hat{\mathbb{C}}$ par les homographies, $h(\omega_4)$ appartient au pseudo-cercle contenant $h(\omega_1), h(\omega_2), h(\omega_3)$ ie ∞, 0 et 1.
Il s'agit donc de la droite réelle auquelle on a adjoint ∞.
D'où $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] = h(\omega_4) \in \mathbb{R}$.

[<u>Etape 2</u> Réciproquement, supposons que $[\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4] \in \mathbb{R}$
Alors $h(\omega_4) = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4]$ ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont 2 à 2 distincts)
et $h(\omega_4) \in \mathbb{R}$ ie le pseudo cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ contenant 0 et 1 auquel on a adjoint ∞. Ainsi, $\omega_4 = h^{-1}(h(\omega_4))$ appartient au pseudo cercle contenant $h^{-1}(0), h^{-1}(1), h^{-1}(\infty)$
ie le pseudo cercle contenant ω_1, ω_2 et ω_3 $\Rightarrow$
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ sont cocycliques ou alignés dans $\hat{\mathbb{C}}$ $\blacksquare$

- Dans la suite, on montre que H est engendré par les homographies de la forme $z \longmapsto az+b$ $(a \neq 0)$ et par l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$.

13

- On montre que les pseudos-cercles de $\hat{\mathbb{C}}$ sont les ensemble de la forme :

$\rightarrow \{z,\ bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ pour $c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C}^*\} \cup \{\infty\}$ (droite $\cup\, \infty$)

$\rightarrow \{z,\ |z|^2 + \left(\frac{\alpha - i\beta}{2}\right) z + \left(\frac{\alpha + i\beta}{2}\right)\bar{z} = R^2$ où $(\alpha, \beta, R) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\}\}$ (Cercle de $\mathbb{C}$)

[__Rappel__ : H est engendré par les similitudes directes $z \longmapsto az+b$ $(a \neq 0)$ et l'application $z \longmapsto \frac{1}{z}$.

[__Dem__ : Soit $h : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$.

- Si $c = 0$ alors nécessairement $\begin{cases} d \neq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ et h est une similitude directe

- Si $c \neq 0$, on a $h(z) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c} \dfrac{1}{cz+d}$

En effet
$$\frac{a}{c} + \frac{(bc-ad)}{c}\frac{1}{cz+d} = \frac{a(cz+d)+(bc-ad)}{c(cz+d)}$$
$$= \frac{acz+\cancel{ad}+bc-\cancel{ad}}{c(cz+d)}$$
$$= \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d}$$
$$= h(z)$$

Alors, en posant

$s_1(z) = cz+d$

$f(z) = \dfrac{1}{z}$

$s_2(z) = \underbrace{\dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c} z}_{\substack{\text{Similitude directe} \\ \text{car } c \neq 0 \\ \text{et } bc-ad \neq 0}}$

On a écrit h comme composée de similitude directe et de l'inversion $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$

On a $h(z) = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-dd}{c} \dfrac{1}{cz+d} = s_2 \circ f \circ s_1(z)$

et d'où le resultat

[**Rappel** : On appelle pseudo-cercle $\boxed{\text{de } \mathbb{C},}$ tout cercle ou droite du plan, les droites étant vues comme des cercles de rayon infini.

[**Rappel** : Les pseudo-cercles $\boxed{\text{de } \mathbb{C}}$ sont exactement donnés par les équations de la forme :

$$a z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} a, c \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{C} \\ |b|^2 > ac \end{array}$$

[**Dem** : Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne :

$(\mathcal{D})$: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

On pose $a = 0$, $b = \dfrac{\alpha - i\beta}{2}$ et $c = \gamma$

Alors $\left(\dfrac{\alpha - i\beta}{2}\right)(x+iy) + \left(\dfrac{\alpha + i\beta}{2}\right)(x-iy) + \gamma = 0$

En effet en développant, on a bien :

$$\frac{\alpha}{2}x + \cancel{i\frac{\alpha}{2}y} - \cancel{i\frac{\beta}{2}x} + \frac{\beta}{2}y + \frac{\alpha}{2}x - \cancel{i\frac{\alpha}{2}y} + \cancel{\frac{i\beta}{2}x} + \frac{\beta}{2}y + \gamma = 0$$

cf l'équation cartésienne de $(\mathcal{D})$

et $a z\bar{z} + \boxed{bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0}$ avec $\begin{cases} \boxed{a = 0} \\ b = \dfrac{\alpha - i\beta}{2} \\ c = \gamma \end{cases}$

- Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = R^2$ avec $(\alpha, \beta, R) \neq (0,0,0)$.

  Par $z = x + iy$, l'équation devient :

$$|z|^2 + \alpha \frac{z + \bar{z}}{2} + \beta \frac{z - \bar{z}}{2i} = R^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} + \frac{\alpha}{2}z + \frac{\alpha}{2}\bar{z} + \frac{\beta}{2i}z - \frac{\beta}{2i}\bar{z} = R^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} + \frac{\alpha}{2}z + \frac{\alpha}{2}\bar{z} - i\frac{\beta}{2}z + i\frac{\beta}{2}\bar{z} = R^2$$

$$\Rightarrow z\bar{z} + \left(\frac{\alpha - i\beta}{2}\right)z + \left(\frac{\alpha + i\beta}{2}\right)\bar{z} = R^2$$

Prenons $a = 1$ et $b = \frac{\alpha - i\beta}{2}$, $c = -R^2$

Alors $|b|^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} > -R^2$ si $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ et $R \neq 0$

ie si $(b, R) \neq (0,0)$

- $(b, R) = (0,0) \Rightarrow \frac{\alpha - i\beta}{2} = 0$ et $R = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$ et $R = 0$

Absurde car par hypothèse $(\alpha, \beta, R) \neq (0,0,0)$

sinon l'équation devient $x^2 + y^2 = 0$

qui ne représente pas un cercle.

Ainsi, un cercle et une droite du plan sont bien représentées par une équation cartésienne de la forme

$$a z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$$

$$a, c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad |b|^2 > ac$$

- <u>Réciproquement</u> : Soit $a z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ $(*)\left[a, c \in \mathbb{R},\ |b|^2 > ac\right]$

Posons $z = x + iy$ et vérifions que l'ensemble des points du plan (x, y) qui vérifie $\circledast$ st les points d'un cercle ou d'une droite du plan

• On pose $z = x+iy$ et $b = \alpha + i\beta$

Alors $a z\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ se réécrit sous la forme :

$$a(x^2+y^2) + (\alpha+i\beta)(x+iy) + (\alpha-i\beta)(x-iy) + c = 0$$

$$ax^2 + ay^2 + \alpha x + \cancel{i\alpha y} + \cancel{i\beta x} - \beta y + \alpha x - \cancel{i\alpha y} - \cancel{i\beta x} - \beta y + c = 0$$

$$ax^2 + ay^2 + 2\alpha x - 2\beta y + c = 0$$

• $\boxed{\text{Si } a = 0}$ $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ sinon $b = 0$ et $|b|^2 > ac$ est absurde

Ainsi si $a = 0$ $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ et (x,y) vérifie $2\alpha x - 2\beta y + c = 0$

et donc $(x,y) \in (D)$ où (D) est la droite du plan d'équation

$$2\alpha x - 2\beta y + c = 0$$

• $\boxed{\text{Si } a \neq 0}$

$$a\left(x^2 + \frac{2\alpha}{a} + \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2\right) - a\times\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 + a\left(y^2 - \frac{2\beta}{a}y + \left(\frac{\beta}{a}\right)^2\right) - a\times\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 + c = 0$$

et $$a\left[\left(x+\frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{a}\right)^2\right] = -c + \frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{a}$$

$$= \frac{-ac + \alpha^2 + \beta^2}{a}$$

$$= \frac{|b|^2 - ac}{a}$$

Or $|b|^2 > ac \iff |b|^2 - ac > 0$

et donc $$\left[\left(x + \frac{\alpha}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{a}\right)^2\right] = \frac{|b|^2 - ac}{a^2} > 0 \text{ car } a \neq 0$$

et on retrouve bien l'équation cartésienne $\boxed{\text{d'un cercle}}$

[**Thm** : Une homographie, envoie un pseudo-cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ sur un pseudo-cercle de $\hat{\mathbb{C}}$.

[**Dem** Puisque les homographies H sont engendrées par les similitudes directes $z \longmapsto az+b$ $(a \neq 0)$ et l'inversion $z \longmapsto \frac{1}{z}$ il suffit de montrer que les pseudos-cercles cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ sont envoyés sur des pseudo-cercles de $\hat{\mathbb{C}}$ par ces transformations

[**Etape 1** Soit $D \cup \{\infty\}$ un pseudo-cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ où D est une droite de $\mathbb{C}$.
Alors D admet une equation cartésienne de la forme
$b_1 z + \overline{b_1} \overline{z} + c_1 = 0$ pour $b_1 \in \mathbb{C}^*$ et $c_1 \in \mathbb{R}$.

Alors, par $h : z \longmapsto az+b$ $(a \neq 0)$, on a
$h(\infty) = \infty$ et $h(D) = \{ z' = az+b, \ bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0 \}$ $z \in \mathbb{C}$

$$= \left\{ z', \ b_1 \left(\frac{z'-b}{a} \right) + \overline{b_1} \overline{\left(\frac{z'-b}{a} \right)} + c_1 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ z', \ \frac{b}{a} z' + \overline{\frac{b}{a}} \overline{z'} + \left(c - \frac{b_1 b}{a} - \overline{\frac{b_1 b}{a}} \right) = 0 \right\}$$

et donc $h(D \cup \{\infty\}) = D' \cup \{\infty\}$ où D' est la droite de $\mathbb{C}$ dont l'equation cartésienne est $\frac{b}{a} z' + \overline{\frac{b}{a}} \overline{z'} + \left(c - \frac{b_1 b}{a} - \overline{\frac{b_1 b}{a}} \right) = 0$

- Soit $h : z \longmapsto \frac{1}{z} = z'$

Alors $0 \in D \cup \{\infty\} \Longleftrightarrow c_1 = 0$
Supposons dans un premier temps que $c_1 = 0$
On a $h(0) = \infty$

- Vérifions désormais pour finir que :
$\mathcal{C}$ est envoyé sur un pseudo-cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ via l'inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$

- Alors $0 \in \mathcal{C} \iff c_1 = 0$

Supposons dans un premier temps que $0 \in \mathcal{C}$

Alors $h(0) = \infty$

Par $z \in \mathbb{C}^*$ on a $h(z) = z'$ vérifie

$$a_1 \frac{1}{z'} \times \frac{1}{\overline{z'}} + b_1 \frac{1}{z'} + \overline{b_1} \frac{1}{\overline{z'}} = 0$$

$$\iff a_1 + b_1 \overline{z'} + \overline{b_1} z' = 0$$

et $h(\mathcal{C}) = \{ z', \overline{b_1} z' + b_1 \overline{z'} + a_1 = 0 \} \cup \{\infty\}$

$= D' \cup \{\infty\}$ est un pseudo-cercle de $\hat{\mathbb{C}}$

car droite de $\mathbb{C}$ auquelle on a adjoint le point ∞

- Si $0 \notin \mathcal{C} \iff c_1 \neq 0$

Alors $h(\mathcal{C}) = \left\{ z' \in \mathbb{C}^*, \ a_1 \frac{1}{z'} \frac{1}{\overline{z'}} + b_1 \frac{1}{z'} + \overline{b_1} \frac{1}{\overline{z'}} + c_1 = 0 \right\}$

$= \{ z' \in \mathbb{C}^*, \ a_1 + b_1 \overline{z'} + \overline{b_1} z' + c_1 |z'|^2 = 0 \}$

Comme $|b_1|^2 > a_1 c_1$, $h(\mathcal{C})$ est bien l'équation cartésienne

d'un vrai cercle de $\mathbb{C}$

Ce qui achève de montrer le résultat ∎